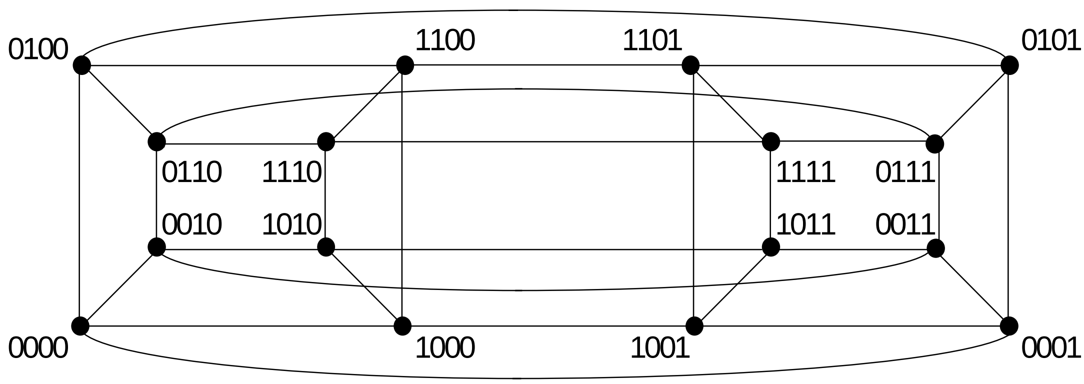
Zastosowanie działań na hiperześcianach binarnych w diagnostyce sieci komputerowych

Formalnie, *n*-wymiarowym hipersześcianem binarnym nazywamy graf zwykły o 2^n węzłach z których każdy opisany jest innym wektorem binarnym $(z_1,\ldots,z_n), (z_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n)$ oraz o $n \cdot 2^{n-1}$ krawędziach, łączących te węzły, których opisy mają odległość Hamminga równą jeden.

Istnieje wiele (izomorficznych) sposobów przedstawiania (rysowania) n-wymiarowego hipersześcianu binarnego, które mają określone cechy, przydatne przy rozwiązywaniu określonych zadań z zakresu systemów, kodów autokorekcyjnych, sieci telekomunikacyjnych, sieci multiprocesorowych oraz z zakresu diagnostyki sieci logicznych i sieci komputerowych.



Przykład 4-wymiarowego hipersześcianu binarnego

Zbiór Z wektorów binarnych $z = (z_1,\ldots,z_n), (z_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n)$ można traktować jako zbiór wierzchołków n - wymiarowego hipersześcianu binarnego, oznaczonych zgodnie z przyjętą orientacją tego hipersześcianu.

Oznaczmy:

$$(s_1,\ldots,s_n) = \{z \in Z: ((s_i \neq x) \Rightarrow (z_i = s_i)) \wedge ((s_i = x) \Rightarrow (z_i \in \{0,1\}))\}, \left(\frac{s_i \in \{0,1,x\}}{1 \le i \le n}\right).$$

Tak więc, wektor $s = (s_1,\ldots,s_n),\ (s_i \in \{0,1,x\}, 1 \le i \le n, n \ge 1)$ można traktować jako r-wymiarowy, ($r = Card\{s' \in \{s_1,\ldots,s_n\} : s' = x\}, 0 \le r \le n$) sześcian binarny, który jest określonym podsześcianem n-wymiarowego hipersześcianu binarnego.
Dla przykładu, na rys. przedstawiono 4-wymiarowy hipersześcian binarny, którego wierzchołki opisują wektory binarne $(z_1,\ldots,z_n), (z_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n)$, a na rys.2-2 zaznaczono niektóre jego podsześciany: 3-wymiarowy $(xxx1)$, 2-wymiarowy $(x1x0)$, 1-wymiarowy $(00x0)$ oraz podsześcian 0-wymiarowy (1000).

Niech S_r^n oznacza zbiór sześcianów r-wymiarowych, które są podsześcianami n-wymiarowego hipersześcianu binarnego.

Zauważmy, że:

$$Card\, S_r^n = \binom{n}{r} \cdot 2^{n-r}, \quad (0 \le r \le n, \quad n \ge 1),$$

bowiem na $\binom{n}{r}$ sposobów można wybrać r składowych wektora s, które mają wartość x, a (dla każdego takiego wyboru) pozostałe $n-r$ składowych może stanowić dowolną kombinację wartości binarnych.

Niech S^n oznacza zbiór wszystkich możliwych podsześcianów n-wymiarowego hipersześcianu binarnego, a $Z(s)$-zbiór podsześcianów 0-wymiarowych (zbiór wektorów $z = (z_1,\ldots,z_n),(z_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n)$) podsześcianu $s, (s \in S^n)$.

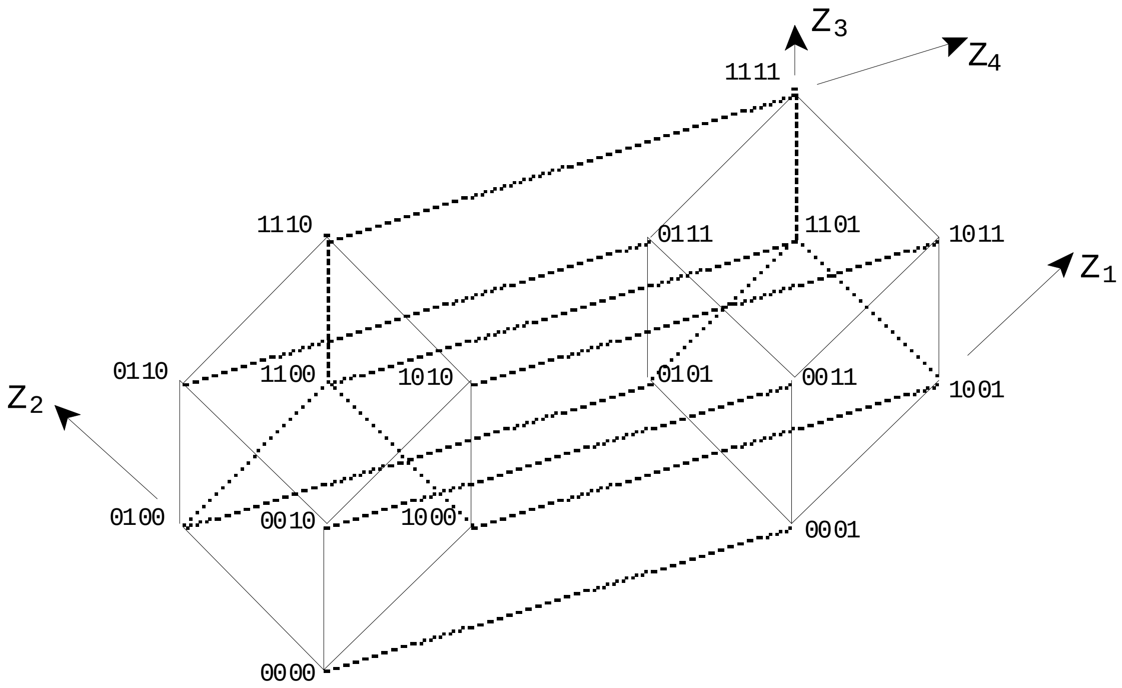
Oczywiście:

$$Card\, Z(s) = 2^{r(s)},$$

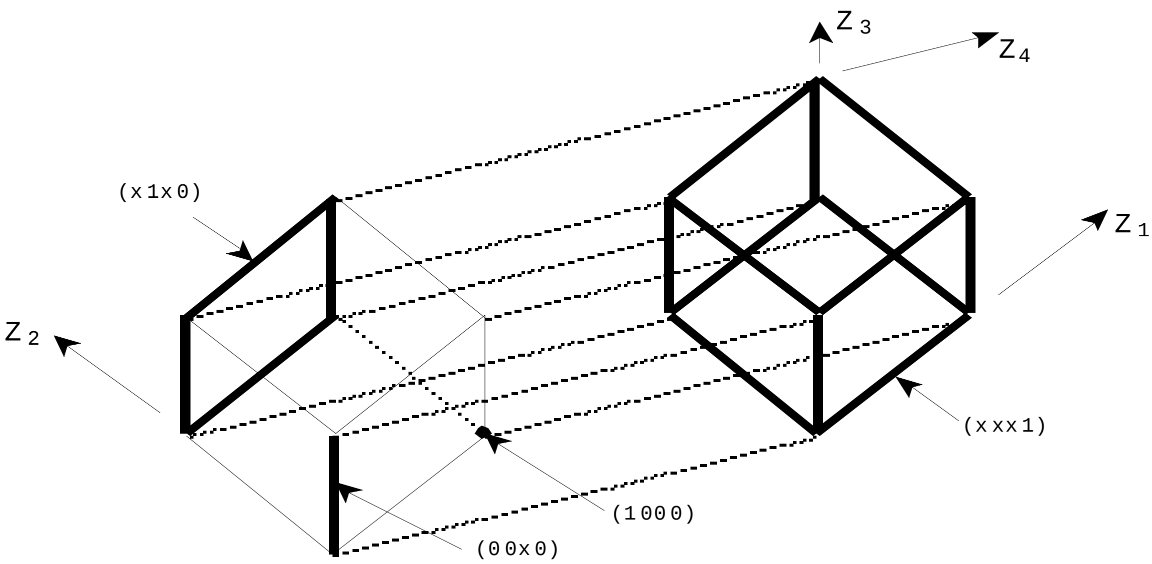
gdzie $r(s)$ oznacza wymiar podsześcianu s.

Tak więc, jeżeli $(s' \in S^n) \wedge (s'' \in S^n)$ to działania na podsześcianach s' i s'' mają sens działań na zbiorach $Z(s')$ i $Z(s'')$, które są określonymi podzbiorami zbioru Z.
Dla przykładu, (rys.):

$$Z((00x0)) = \{(0010),(0000)\};$$
$$Z((x1x0)) \cap Z((xxx1)) = \varnothing;$$
$$Z((x1x0)) \cap Z((1xx0)) = Z((11x0));$$
$$Z((x1x0)) \cup Z((x0x0)) = Z((xxx0));$$
$$Z((xxxx)) \setminus Z((xxx0)) = Z((xxx1)),$$



Rys. Hipersześcian binarny 4-wymiarowy $(xxxx)$



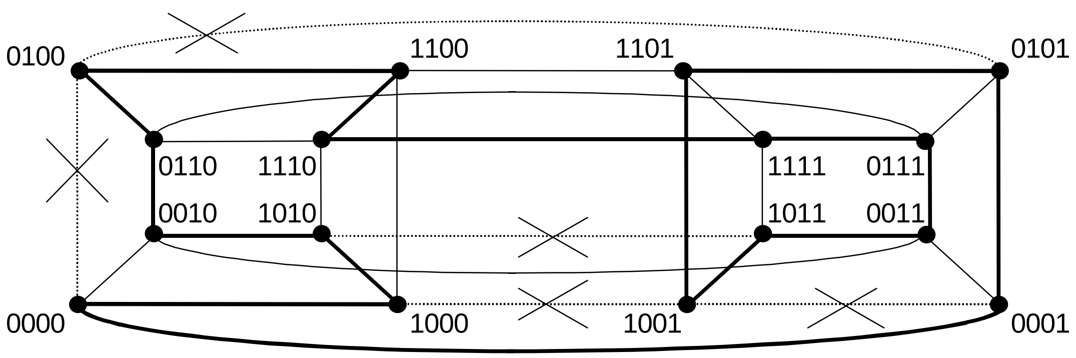
Rys. Podsześciany $(xxx1),(x1x0),(00x0),(1000)$
hiperszęścianu binarnego $(xxxx)$

REKONFIGURACJA STRUKTURY PIERŚCIENIOWEJ SIECI KOMPUTEROWEJ W SYTUACJI USZKODZENIA SIĘ NIEKTÓRYCH Z NADMIAROWYCH LINII TRANSMISJI DANYCH

Formalnie, n-wymiarowym hipersześcianem binarnym nazywamy graf zwykły G', ($G' = < E, U'>$, $|E| = 2^n$, $|U'| = n \cdot 2^{n-1}$) o 2^n węzłach, z których każdy opisany jest innym wektorem binarnym z, $(z = (z_1, \ldots, z_n), z_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n, z \in Z^n)$ oraz o $n \cdot 2^{n-1}$ krawędziach, łączących te węzły, których opisy mają odległość Hamminga równą jeden.

Mówimy, że sieć komputerowa, zawierająca 2^n komputerów i $|U|$, ($2^n \le |U| \le n \cdot 2^{n-1}$) linii transmisji danych, ma architekturę typu hipersześcianu n-wymiarowego (architekturę zagnieżdżoną w n-wymiarowym hipersześcianie binarnym), jeżeli graf G, ($G = <E, U>$, $U \subseteq U'$) opisujący tę architekturę , jest grafem Hamiltona (grafem, w którym istnieje cykl Hamiltona - cykl przechodzący przez każdy węzeł grafu jeden i tylko jeden raz).
Zauważmy, że każda architektura pierścieniowa [pętlowa], (ang. ring network, loop network) o 2^n komputerach jest beznadmiarową (w sensie liczby możliwych wadliwych linii transmisji danych) architekturą typu hipersześcianu oraz, że architektura typu hipersześcianu jest szczególnym rodzajem architektury oczkowej (ang. mesh network).

Jednym z powodów stosowania architektury typu hipersześcianu jest możliwość zapewnienia efektywnego funkcjonowania komputerów w pierścieniu pomimo, iż niektóre linie transmisji danych utraciły całkowicie (na skutek zniszczenia) lub częściowo (na skutek zakłóceń) zdolność do funkcjonowania z wymaganą poprawnością.
Dla przykładu, na rysunku przedstawiono sieć komputerową o architekturze hipersześcianu 4-wymiarowego, która ma 27 linii transmisji danych oraz zaznaczono jeden z 35 możliwych, dla tej sieci, pierścieni.



Sieć komputerowa typu hipersześcianu 4-wymiarowego z zaznaczonym pierścieniem

Zauważmy, że własnością ciągu binarno-cyklicznego jest to, że:

$$
\begin{gathered}
(z_n,\ldots,z_2,z_1)\perp(z_n,\ldots,z_2,\bar{z}_1),(n\geq 2);\\
(z_n,\ldots,z_3,z_2,1)\perp(z_n,\ldots,z_3,\bar{z}_2,1),(n\geq 3);\\
(3\leq i\leq n)\rightarrow(z_n,..,z_i,1,0,\ldots,0)\perp(z_n,\ldots,\bar{z}_i,1,0,\ldots,0);\\
(z_n,z_{n-1},0,\ldots,0)\perp(\bar{z}_n,z_{n-1},0,\ldots,0),(n\geq 3).
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Tak więc z powyższych własności wynika algorytm bezpośredniego wyznaczania zbioru $S(n)$, ($n\geq 3$) bowiem:

$$
\begin{gathered}
(s'\in S_1^n)\wedge(s'_n=x)\rightarrow(s'\in S(n));\\
(s'\in S_1^n)\wedge(s'_{n-1}=x)\rightarrow((s'\in S(n)\leftrightarrow(s_n=1));\\
(s'\in S_1^n,n\geq 4)\wedge(s'_i=x,2\leq i\leq n-2)\rightarrow((s'\in S(n)\leftrightarrow(s'_{i+1}=1)\wedge(s'_{i+k}=0,2\leq k\leq n-i));\\
(s'\in S_1^n)\wedge(s'_1=x)\rightarrow((s'\in S(n)\leftrightarrow(s_i=0,3\leq i\leq n)).
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Dla przykładu, z zależności (2), otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
S(3)&=\{(s_1,s_2,x)\}+\{(s_1,x,1)\}+\{(x,s_2,0)\};\\
S(4)&=\{(s_1,s_2,s_3,x)\}+\{(s_1,s_2,x,1)\}+\{(s_1,x,1,0)\}+\{(x,s_2,0,0)\};\\
S(5)&=\{(s_1,\ldots,s_4,x)\}+\{(s_1,s_2,s_3,x,1)\}+\{(s_1,s_2,x,1,0)\}+\{(s_1,x,1,0,0)\}+\\
&\quad+\{(x,s_2,0,0,0)\},(s_i\in\{0,1\}).
\end{aligned}
$$

Z zależności (2) wynika, że zbiór $S(n)$, ($n\geq 3$) można jednoznacznie określić przez macierz $M(n),(M(n)=[m_{i\,j}]_{(n\times n)},m_{i\,j}\in\{\varnothing,0,1,x\})$ taką, że $m_{i,n-i+1}=x$, a zbiór $S(S(n), f)$ - przez macierz $M(M(n), f)$, która jest wynikiem permutacji f kolumn macierzy $M(n)$.

Tak więc:

$M(3)$

		x
	x	1
x		0

$M(4)$

			x
		x	1
	x	1	0
x		0	0

$M(5)$

				x
			x	1
		x	1	0
	x	1	0	0
x		0	0	0

$M(M(5), (4)(15)(23))$

x				
1			x	
0	x		1	
0	1	x	0	
0	0		0	x

Oznaczmy:

$$\gamma(s') = |\{i \in \{1,\dots,n\} : s'_i = 0\}|,\ (s' \in S_1^n)$$
$$S(s') = \{s'' \in S_1^n : \gamma(s'') = \gamma(s')\},$$
$$S^0(s') = \{s'' \in S(s') : s'' \notin S(n)\}.$$

Zauważmy, że:

$$[s''' \in S^0(s')] \leftrightarrow [\ \exists s'' \in S(s') : (s''_i = x) \to (s'' \cdot m_{n-i+1} = \varnothing)],\ (s''' \in S(s')) \qquad (3)$$

gdzie m_j oznacza zbiór sześcianów 1-wymiarowych, określony przez j-ty wiersz macierzy $M(n)$.
Tak więc:

$$F(S^*) = \bigcap_{s' \in S^*} F(s'), \qquad (4)$$

gdzie:

$$F(s') = \{f \in F : s(s', f) \in S^0(s')\}. \qquad (5)$$

Wyznaczenie zbioru $F(S^*)$ stanowi dla $n = 3$ całkowite, a dla $n \geq 4$-częściowe rozwiązanie sformułowanego problemu.

Dla przypadku gdy $n \geq 4$, proponowany algorytm polega na rozłożeniu hipersześcianu n-wymiarowego względem zmiennej z_i, ($i \in \{1,\dots,n\}$) na dwa rozłączne podhipersześciany (n-1)-wymiarowe: $H_{i=0}^{n-1}, (H_{i=0}^{n-1} = (x,\dots,s_i = 0,\dots,s_n = x))$ i $H_{i=1}^{n-1}, (H_{i=1}^{n-1} = (x,\dots,s_i = 1,\dots,s_n = x))$ oraz na wybraniu dwóch podsześcianów s' i s" ze zbioru $S_1^n(s_i = x)$, $(S_1^n(s_i = x) = \{s \in S_1^n \setminus S^* : s_i = x\})$. Wybiera się takie i, że: $|\{s \in S^* : s_i = x\}| = \max$.
Oznaczmy: $z'_a = s' \cdot H_{i=a}^{n-1}$ oraz $z''_a = s'' \cdot H_{i=a}^{n-1}, (a \in \{0,1\})$.
Niech $\mathcal{S}(z'_a, z''_a)$ oznacza zbiór takich łańcuchów Hamiltona $S(z'_a, z''_a), (S(z'_a, z''_a) \in \mathcal{S}(z'_a, z''_a),\ S(z'_a, z''_a) \subset S_1^n, |S(z'_a, z''_a)| = 2^{n-1} - 1)$ łączących z'_a z z''_a, w podhipersześcianie $H_{i=a}^{n-1}$, że:

$$\forall S(z'_a, z''_a) \in \mathcal{S}(z'_a, z''_a) : \{S(z'_a, z''_a) \cap \{s \in S^* : s \cdot H_{i=a}^{n-1} \neq \varnothing\}\} = \varnothing.$$

Tak więc, każdy zbiór S' taki, że $S' = S(z'_0, z''_0) + S(z'_1, z''_1) + s' + s''$ jest takim pierścieniem Hamiltona, w n-wymiarowym hipersześcianie, że $S' \cap S^* = \varnothing$.

Niech $\mathcal{S}'$ oznacza sumę pierścieni wyznaczonych (w powyższy sposób) dla wszystkich możliwych s' i s" zbioru $S_1^n(s_i = x)$, a $\mathcal{S}(G)$-zbiór pierścieni w grafie G, opisującym strukturę sieci komputerowej. Jeżeli $|S_1^n(s_i = x)| < 4$, to $\mathcal{S}' = \mathcal{S}(G)$- w przeciwnym razie $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}(G)$.